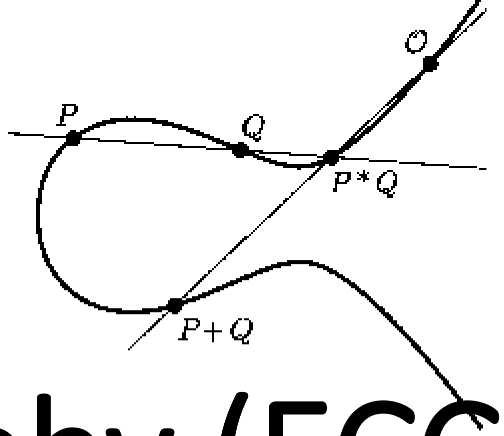
II4031 Kriptografi dan Koding



Elliptic Curve Cryptography (ECC)

(Bagian 2)

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Sistem dan Teknologi Informasi
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
ITB

Kurva Eliptik

- Kurva eliptik adalah kurva dengan bentuk umum persamaan:

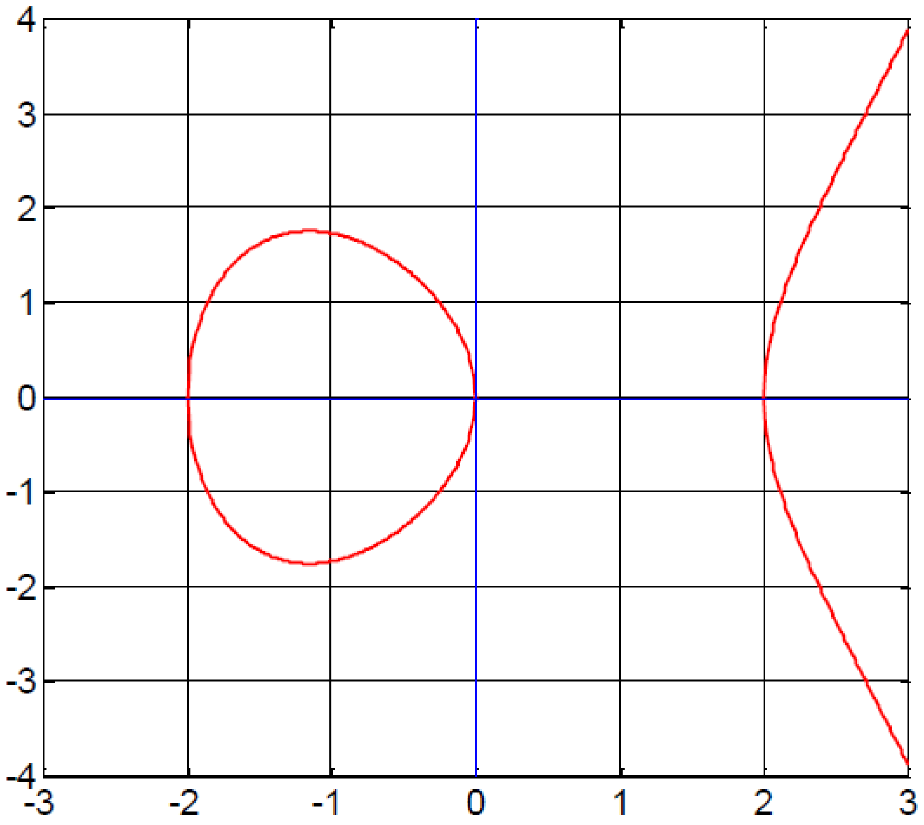
$$y^2 = x^3 + ax + b$$

dengan syarat $4a^3 + 27b^2 \neq 0$

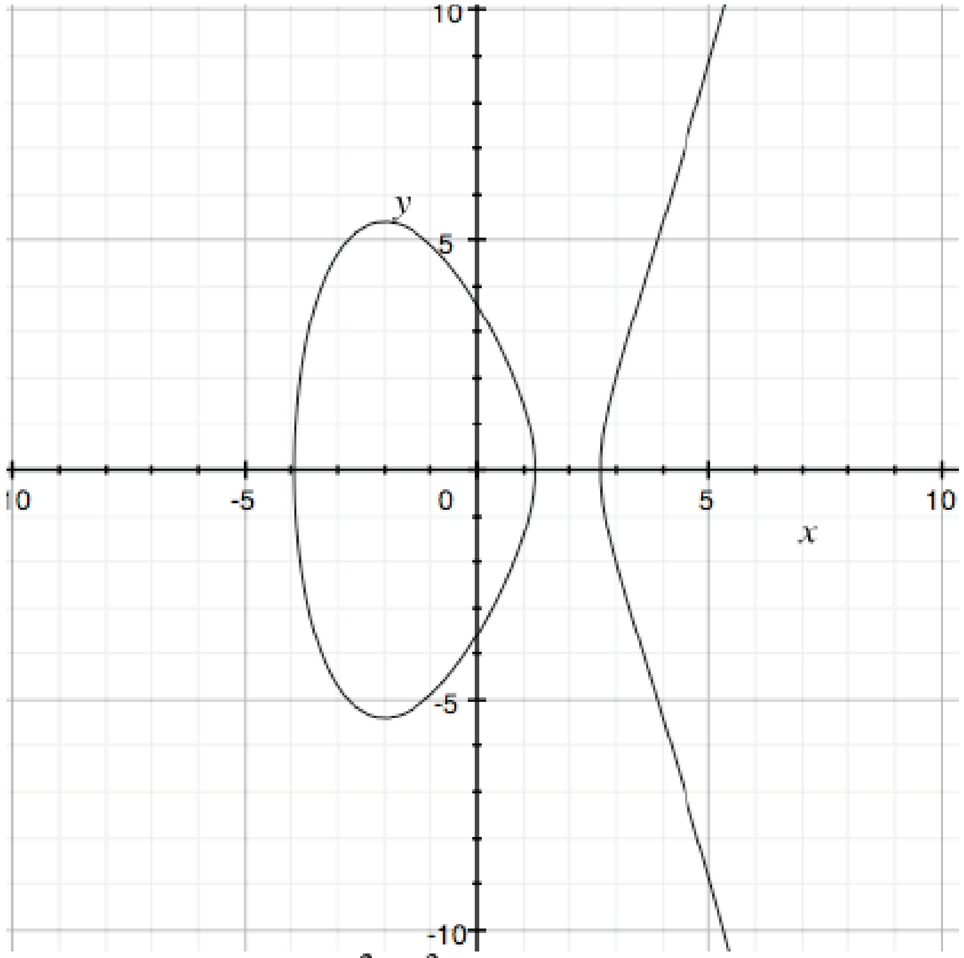
- Tiap nilai a dan b berbeda memberikan kurva eliptik yang berbeda.

- Contoh: $y^2 = x^3 - 4x$

$$= x(x - 2)(x + 2)$$

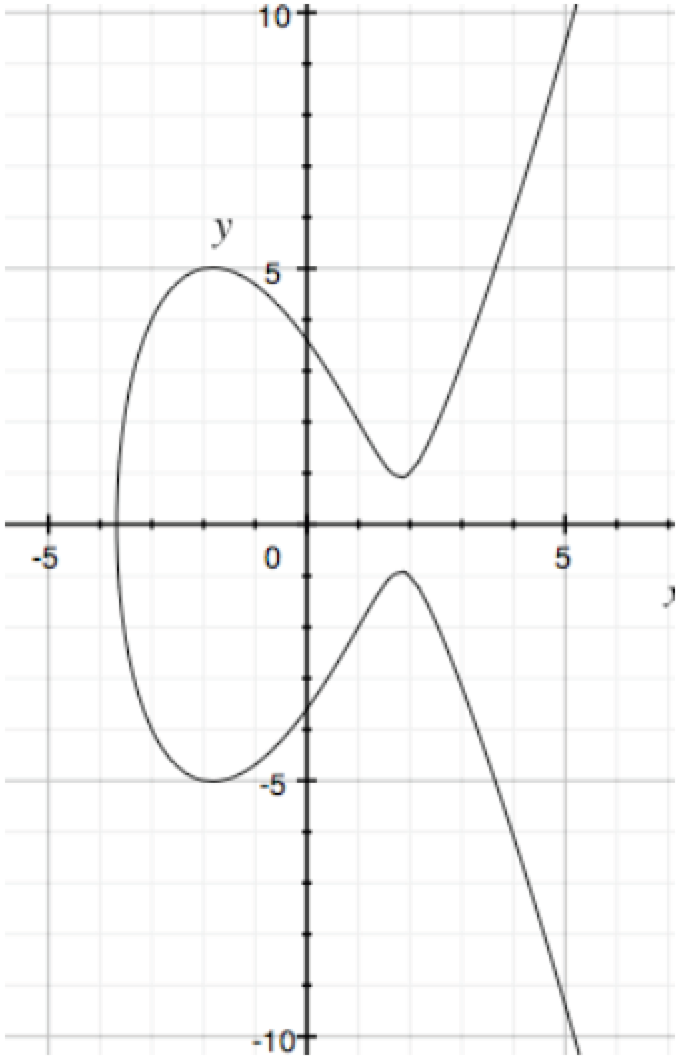


Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography



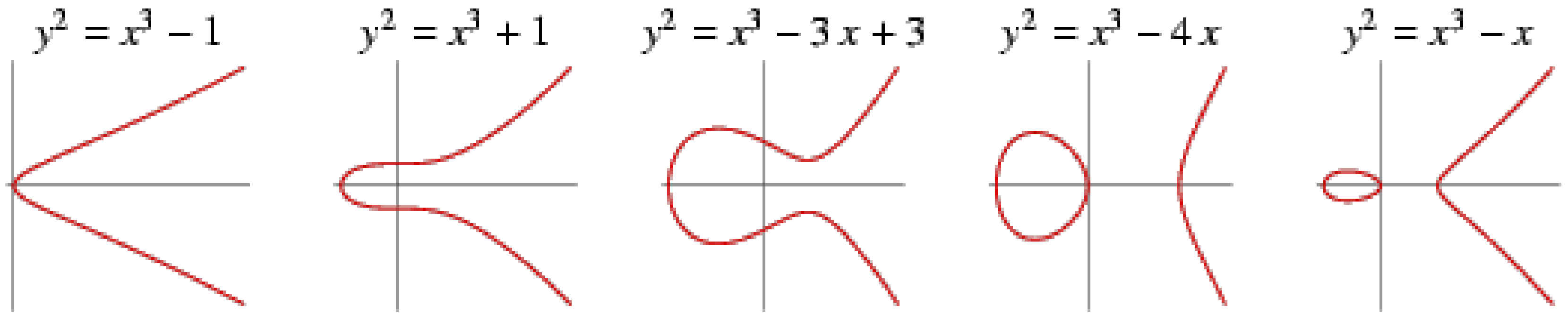
$$y^2 = x^3 - 12x + 13$$

Sumber gambar: Kevin Tirtawinata, Studi dan Analisis Elliptic Curve Cryptography



$y^2 = x^3 - 10x + 13$

Sumber gambar: Kevin Tirtawinata, Studi dan Analisis Elliptic Curve Cryptography



Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** ,
Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b$ terdefinisi untuk $x,y \in R$

- Didefinisikan sebuah titik bernama titik $O(x, \infty)$, yaitu titik pada *infinity.*

- Titik-titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik bersama operasi + membentuk sebuah grup.

  Himpunan G : semua titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik

  Operasi biner : +

- Penjelasan kenapa kurva eliptik membentuk sebuah grup dijelaskan pada *slide-slide* berikut ini.

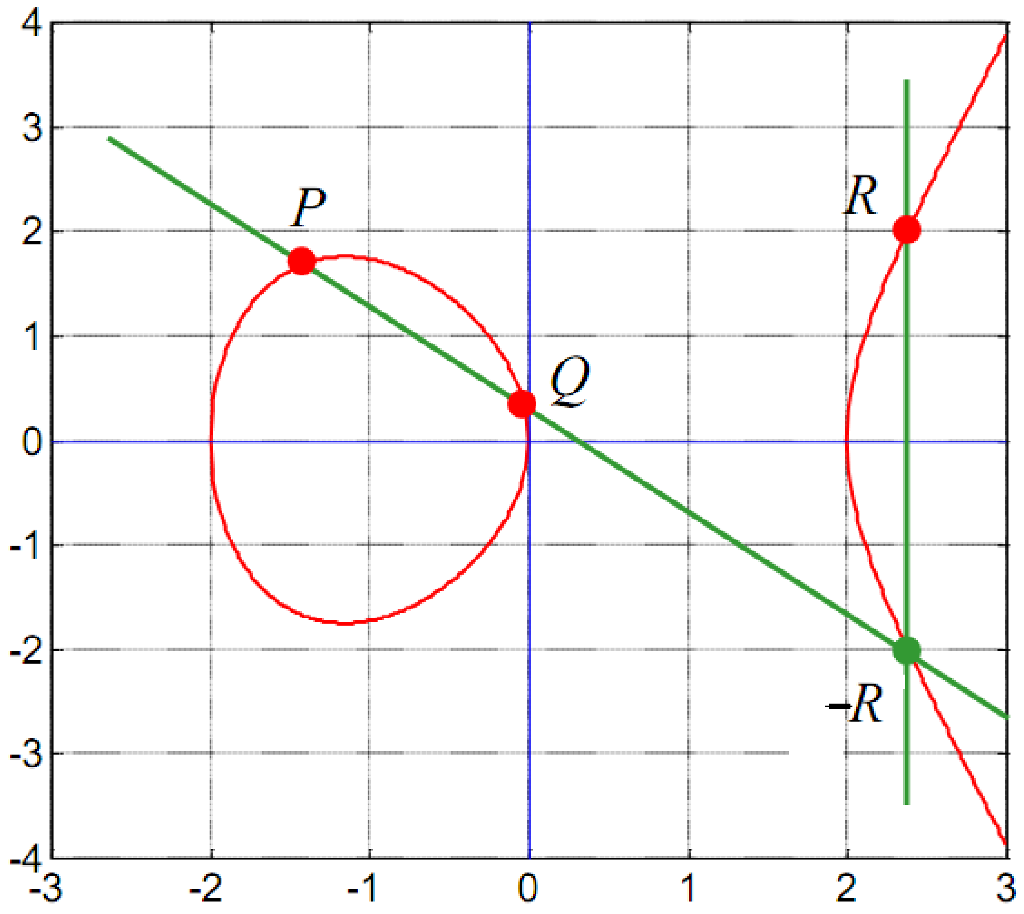
Penjumlahan Titik pada Kurva Eliptik

(a) P + Q = R

Penjelasan geometri:

1. Tarik garis melalui P dan Q
2. Jika P $\neq$ Q, garis tersebut memotong kurva pada titik -R
3. Pencerminan titik -R terhadap sumbu-x adalah titik R
4. Titik R adalah hasil penjumlahan titik P dan Q

Keterangan: Jika R =(x, y) maka –R adalah titik (x, -y)



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Penjelasan Analitik P + Q = R

Persamaan garis g: y = mx + c

Gradien garis g: $m = \dfrac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$

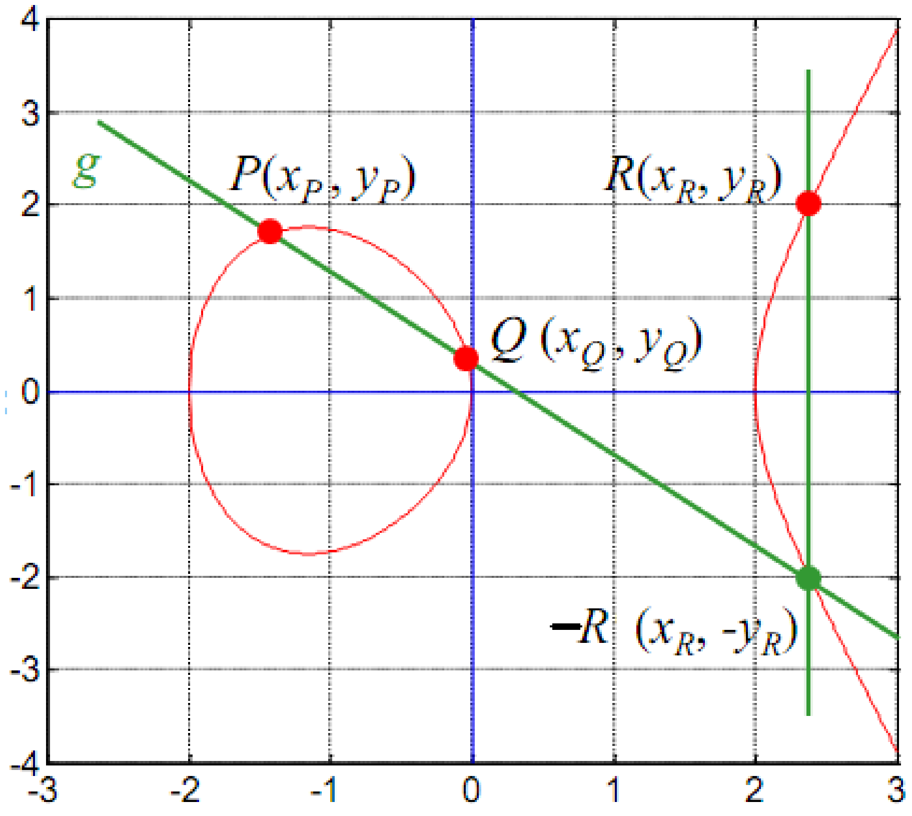
Perpotongan garis g dengan kurva $y^2 = x^3 + ax + b$:

$(mx + c)^2 = x^3 + ax + b$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - x_p - x_q$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Contoh: Kurva eliptik $y^2 = x^3 + 2x + 4$

Misalkan P(2, 4) dan Q(0, 2) dua titik pada kurva

Penjumlahan titik: P + Q = R. Tentukan R!

Langkah-langkah menghitung koordinat R:

- Gradien garis g: $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q) = (4 - 2)/(2 - 0) = 1$
- $x_r = m^2 - x_p - x_q = 1^2 - 2 - 0 = -1$
- $y_r = m(x_p - x_r) - y_p = 1(2 - (-1)) - 4 = -1$
- Jadi koordinat R(-1, -1)
- Periksa apakah R(-1, -1) sebuah titik pada kurva eliptik:

$$y^2 = x^3 + 2x + 4 \Leftrightarrow (-1)^2 = (-1)^3 + 2(-1) + 4$$
$$\Leftrightarrow 1 = -1 - 2 + 4$$
$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

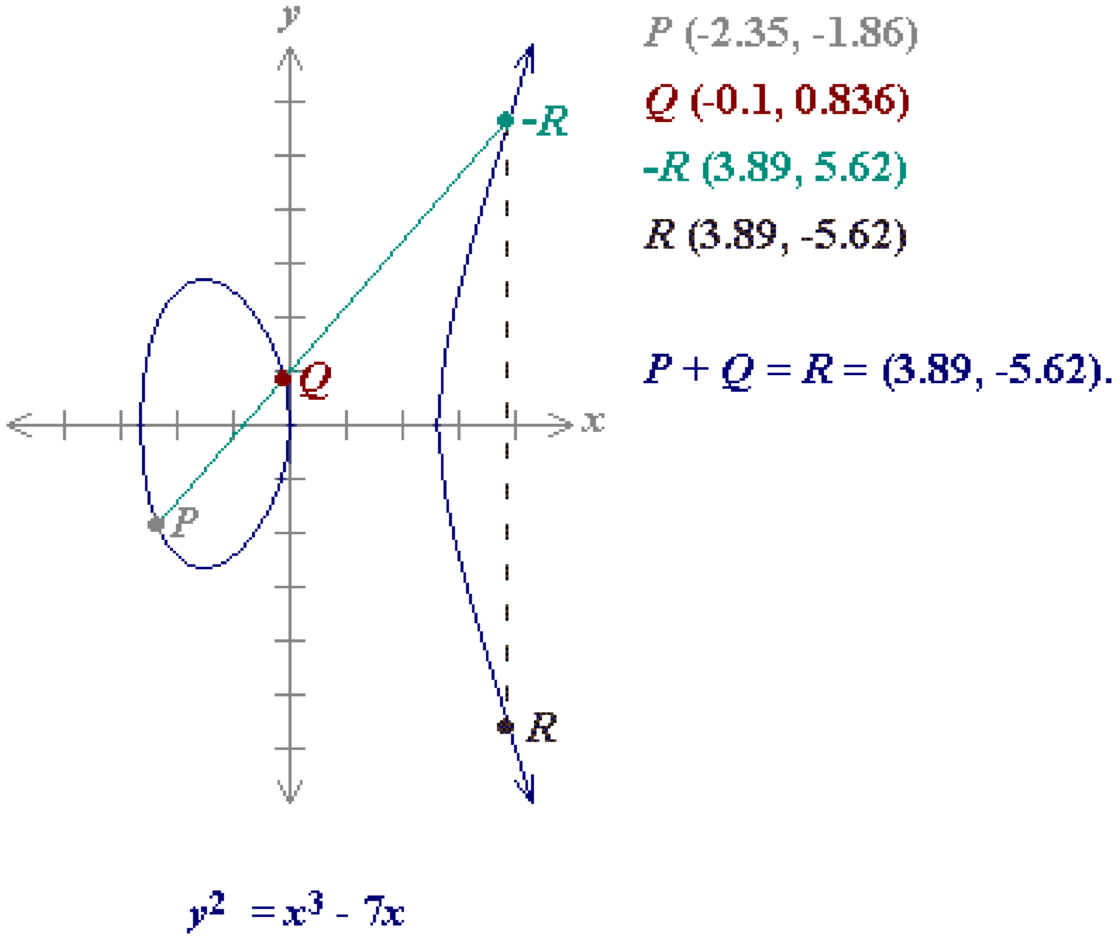
(terbukti R(-1,-1) titik pada kurva $y^2 = x^3 + 2x + 4$)

- Contoh lain:

$m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$
$= (-1.86-0.836)/(-2.35-(-0.1))$
$= -2.696 / -2.25 = 1.198$

$x_r = m^2 - x_p - x_q$
$= (1.198)^2 - (-2.35) - (-0.1)$
$= 3.89$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$
$= 1.198(-2.35 - 3.89) - (-1.86)$
$= -5.62$



Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

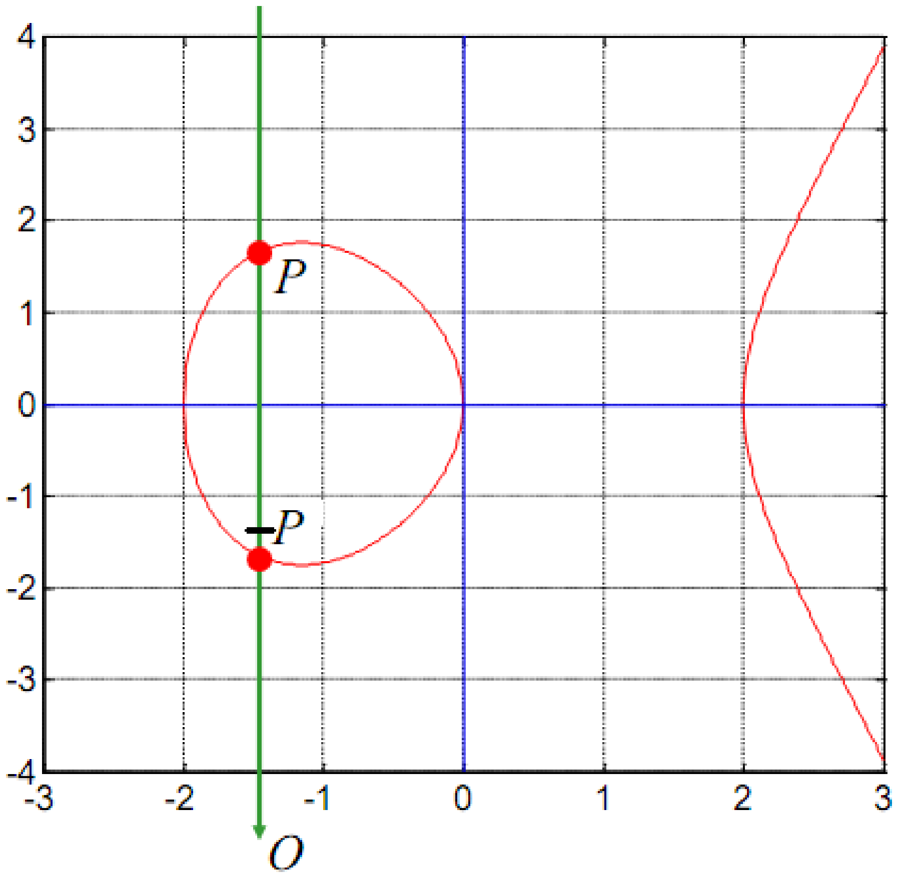
(b) P + (-P) = O, di sini O adalah titik di *infinity*

P’= -P adalah elemen invers:

P + P’ = P + (-P) = O

O adalah elemen netral:

P + O = O + P = P



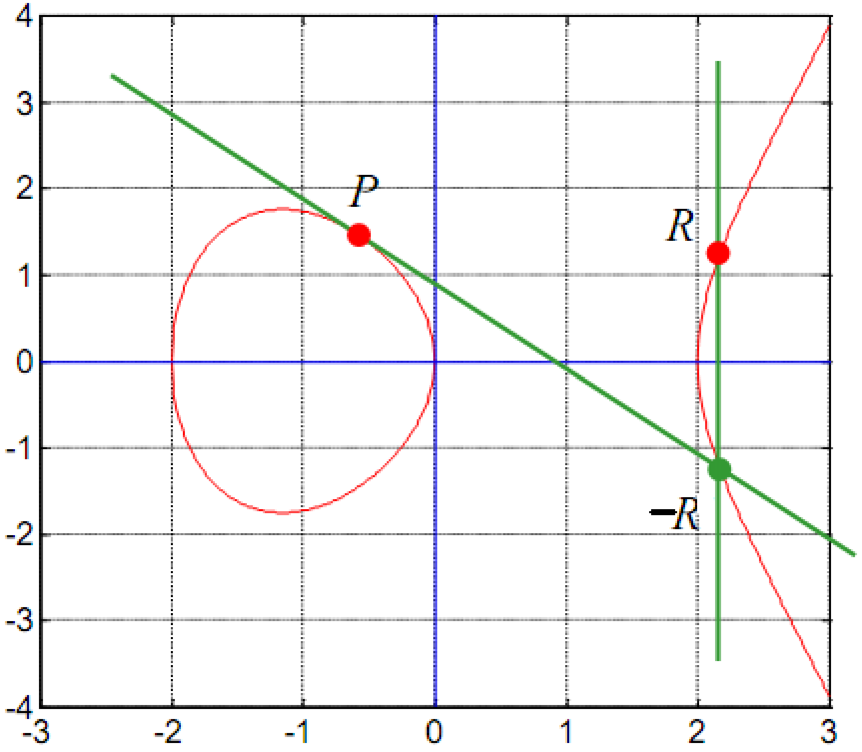
Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Penggandaan Titik

- Penggandaan titik (*point doubling*): menjumlahkan sebuah titik pada dirinya sendiri

- Penggandaan titik membentuk tangen pada titik P(x, y)

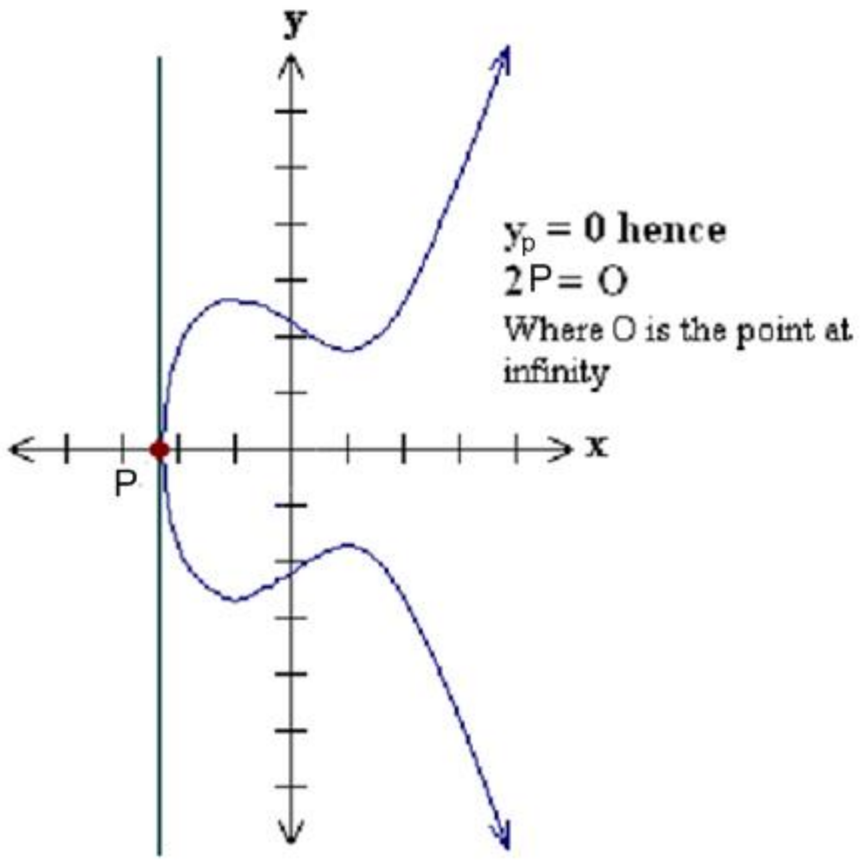
- P + P = 2P = R



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

- Jika ordinat titik P nol, yaitu y_p = nol, maka tangen pada titik tersebut berpotongan pada sebuah titik di *infinity*.

- Di sini, P + P = 2P = O



Sumber gambar: Anoop MS , Elliptic Curve Cryptography, an Implementation Guide

Penjelasan Analitik P + P = 2P = R

Persamaan tangen g: $y = mx + c$

Gradien garis g: $m = \frac{dy}{dx} = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p}$

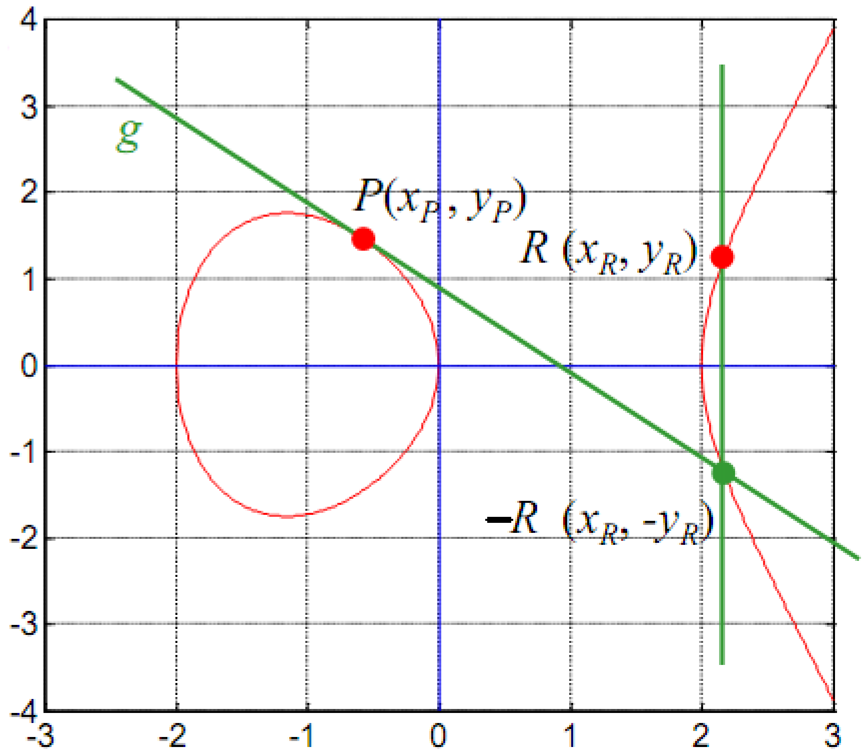
Perpotongan garis g dengan kurva: $(mx + c)^2 = x^3 + ax + b$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$

Jika $y_p = 0$ maka m tidak terdefinisi sehingga 2P = O



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

- Contoh:

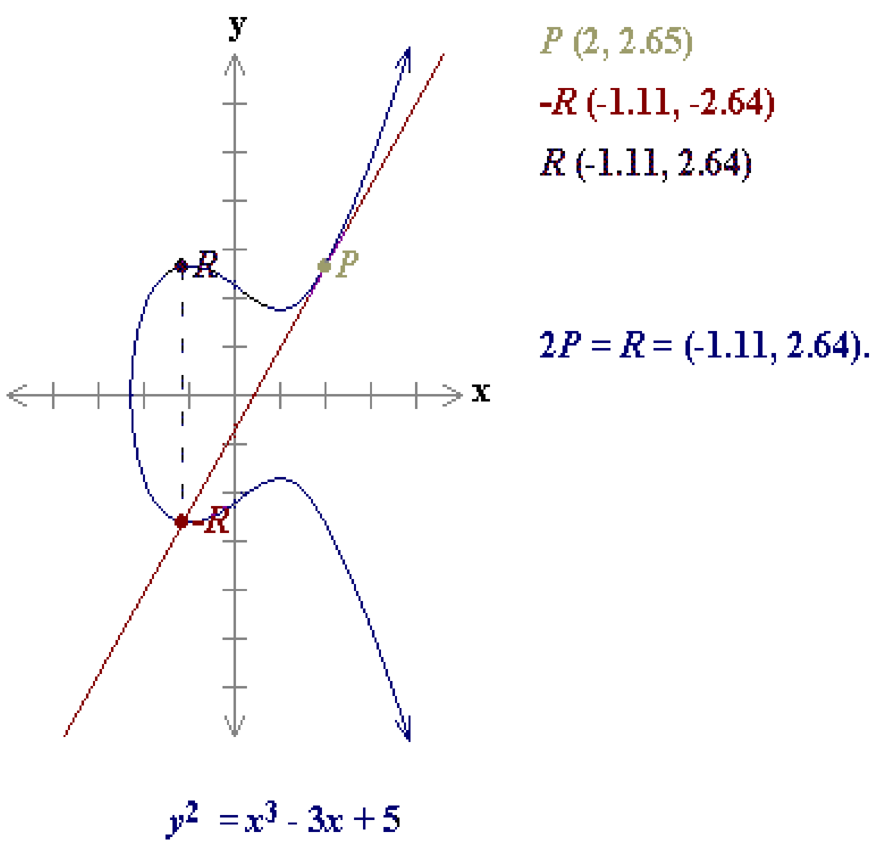
P+P = 2P

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p}$$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$



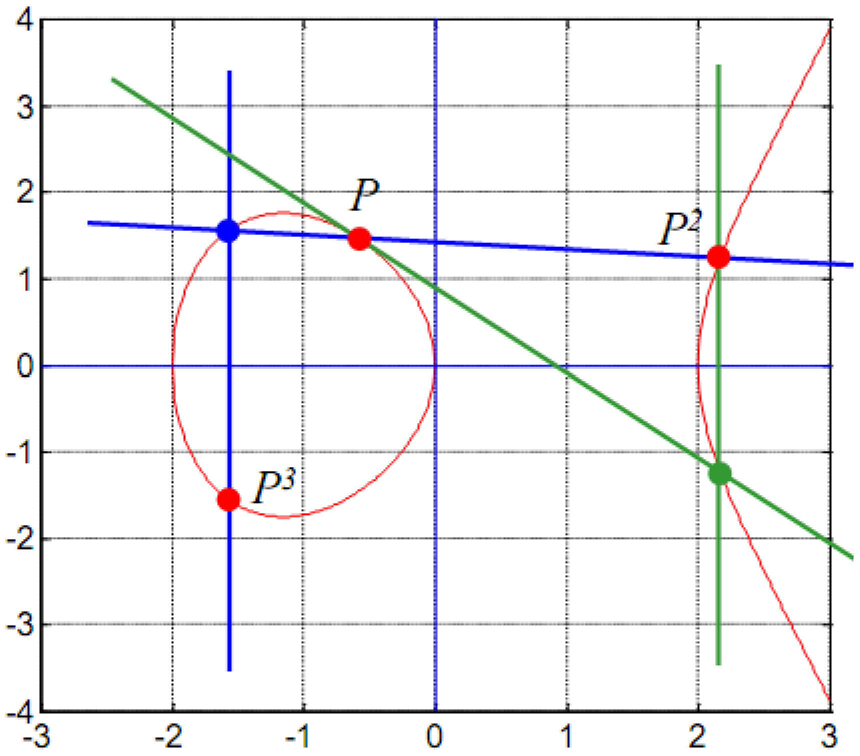
Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Pelelaran Titik

- Pelelaran titik (*point iteration*): menjumlahkan sebuah titik sebanyak k – 1 kali terhadap dirinya sendiri.

- $P^k = kP = P + P + \ldots + P$

- Jika k = 2 → $P^2 = 2P = P + P$



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Jelaslah Kurva Eliptik membentuk Grup <G, +>

- Himpunan G: semua titik P(x,y) pada kurva eliptik
- Operasi biner: +
- Semua aksioma terpenuhi sbb:

1. Closure: semua operasi P + Q berada di dalam G
2. Asosiatif: P + (Q + R) = (P + Q) + R
3. Elemen netral adalah O: P + O = O + P = P
4. Elemen invers adalah -P: P + (-P) = O
5. Komutatif: P + Q = Q + P (abelian)

Perkalian Titik

- Perkalian titik: $kP = Q$

  Ket: k adalah skalar, P dan Q adalah titik pada kurva eliptik

- Perkalian titik diperoleh dengan perulangan dua operasi dasar kurva eliptik yang sudah dijelaskan:

  1. Penjumlahan titik ($P + Q = R$)

  2. Penggandaan titik ($2P = R$)

- Contoh: $k = 3 \rightarrow 3P = P + P + P$ atau $3P = 2P + P$

  $k = 23 \rightarrow kP = 23P = 2(2(2(2P) + P) + P) + P$

Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem (ECDLP)

- Menghitung kP = Q mudah, tetapi menghitung k dari P dan Q sulit. Inilah ECDLP yang menjadi dasar ECC.
- ECDLP dirumuskan sebagai berikut:

  Diberikan *P* dan *Q* adalah dua buah titik di kurva eliptik, carilah integer *k* sedemikian sehingga *Q* = *kP*

- Secara komputasi sulit menemukan k, jika k adalah bilangan yang besar. k adalah logaritma diskrit dari Q dengan basis P. *)
- Pada algoritma ECC, Q adalah kunci publik, k adalah kunci privat, dan P sembarang titik pada kurva eliptik.

Catatan: ingatlah kP = P^k , sehingga Q = kP = P^k, k adalah logaritma diskrit dari Q

Kurva Eliptik pada Galois Field

- Operasi kurva eliptik yang dibahas sebelum ini didefinisikan pada bilangan riil.
- Operasi pada bilangan riil tidak akurat karena mengandung pembulatan
- Pada sisi lain, kriptografi dioperasikan pada ranah bilangan integer.
- Agar kurva eliptik dapat dipakai di dalam kriptografi, maka kurva eliptik didefinisikan pada medan berhingga atau Galois Field, yaitu GF(p) dan GF(2^m).
- Yang dibahas dalam kuliah ini hanya kurva eliptik pada GF(p)

Kurva Eliptik pada GF(p)

- Bentuk umum kurva eliptik pada GF(p) (atau F_p) :

$$\mathbf{y^2 = x^3 + ax + b \mod p}$$

yang dalam hal ini p adalah bilangan prima dan elemen-elemen medan galois adalah {0, 1, 2, …, p – 1}

- **Contoh**: Tentukan semua titik P(x,y) pada kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6 \bmod 11$ dengan x dan y didefinisikan di dalam GF(11)

Jawab:

$x = 0 \rightarrow y^2 = 6 \bmod 11 \rightarrow$ tidak ada nilai y yang memenuhi

$x = 1 \rightarrow y^2 = 8 \bmod 11 \rightarrow$ tidak ada nilai y yang memenuhi

$x = 2 \rightarrow y^2 = 16 \bmod 11 \equiv 5 \pmod{11} \rightarrow y_1 = 4$ dan $y_2 = 7$

$\rightarrow$ P(2,4) dan P'(2, 7)

$x = 3 \rightarrow y^2 = 36 \bmod 11 \equiv 3 \pmod{11} \rightarrow y_1 = 5$ dan $y_2 = 6$

$\rightarrow$ P(3,5) dan P'(3, 6)

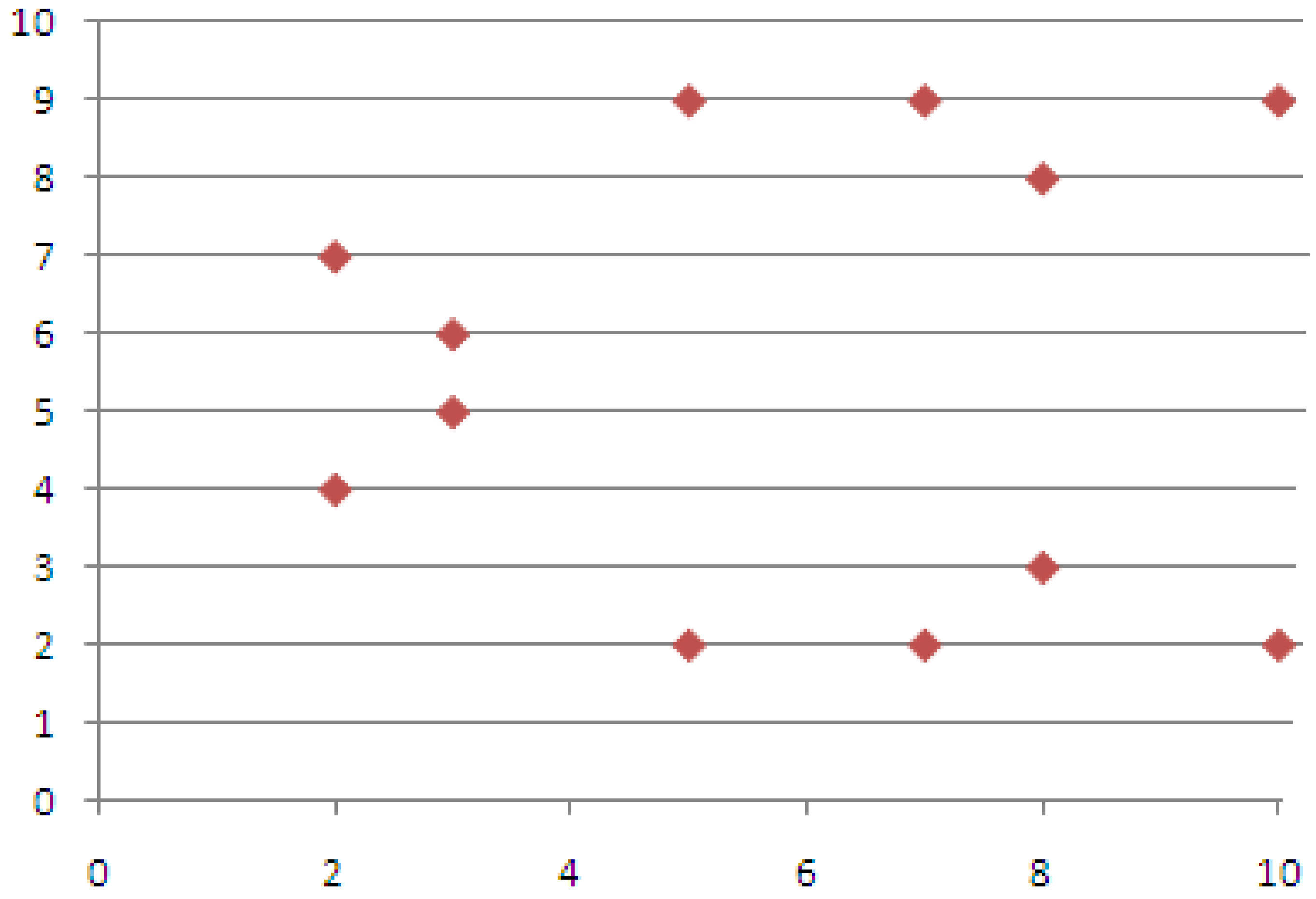
Jika diteruskan untuk x = 4, 5, …, 10, diperoleh tabel sebagai berikut :

x	y^2	$y_{1,2}$	P(x,y)	P'(x,y)
0	6	-		
1	8	-		
2	5	4,7	(2,4)	(2,7)
3	3	5,6	(3,5)	(3,6)
4	8	-		
5	4	2,9	(5,2)	(5,9)
6	8	-		
7	4	2,9	(7,2)	(7,9)
8	9	3,8	(8,3)	(8,8)
9	7	-		
10	4	2,9	(10,2)	(10,9)

Jadi, titik-titik yang terdapat pada kurva eliptik adalah 12, yaitu: (2, 4), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (5, 2), (5, 9), (7, 2), (7, 9), (8, 3), (8, 8), (10, 2), (10, 9)

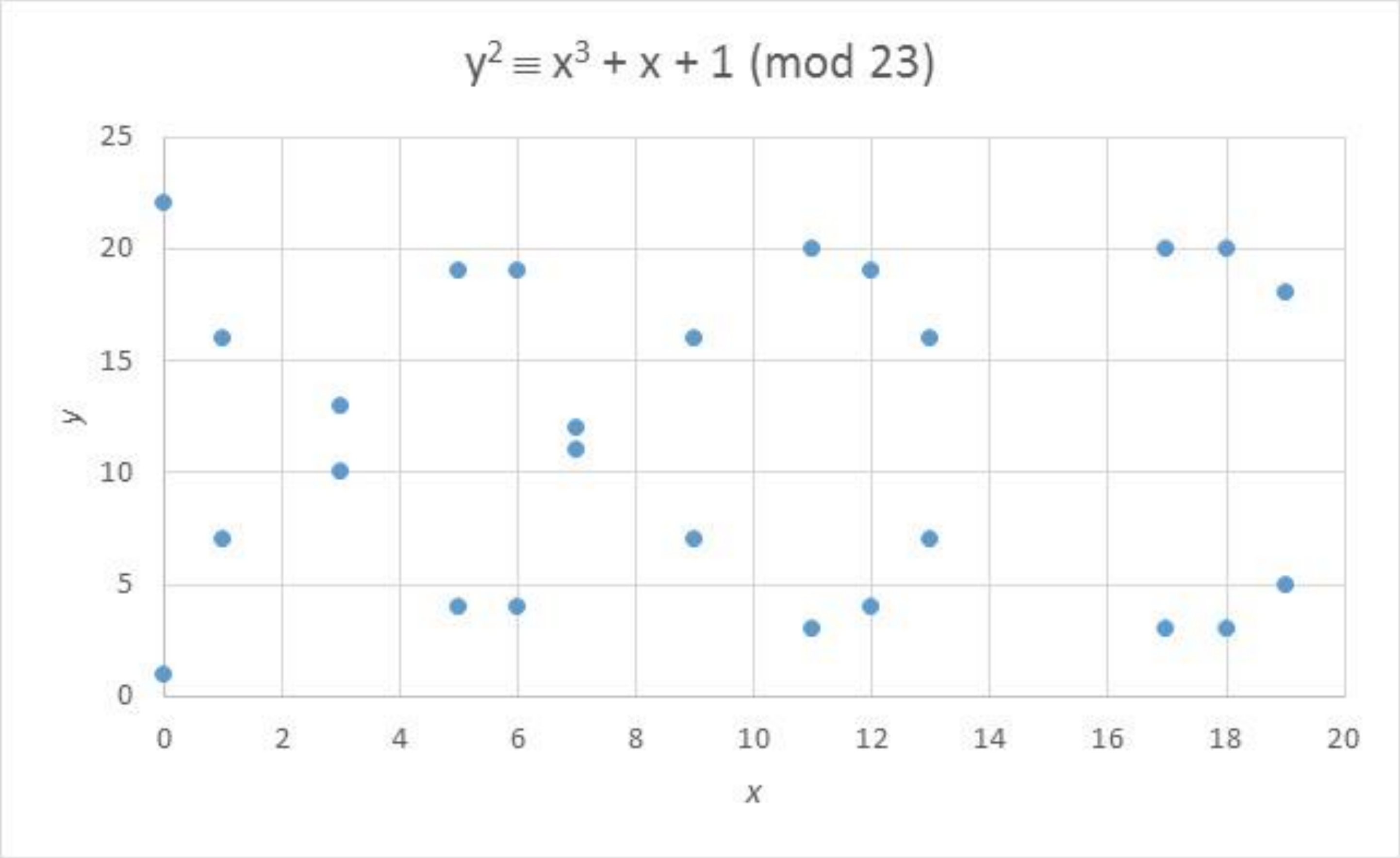
Jika ditambah dengan titik O di infinity, maka titik-titik pada kurva eliptik membentuk grup dengan n = 13 elemen.

Sumber: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography



Sebaran titik di dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6 \mod 11$ pada GF(11)

- Contoh lain: Kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 + x + 1$ (**mod** 23) memiliki titik-titik di dalam himpunan {(0, 1), (0, 22), (1, 7), (1, 16), (3, 10), (3, 13), (5, 4), (5, 19) , (6, 4), (6, 19), (7, 11), (7, 12), (9, 7), (9, 16), (11, 3), (11, 20), (12, 4), (12, 19), (13, 7), (13, 16), (17, 3), (17, 20), (18, 3), (18, 20), (19, 5), (19, 18)}.



Penjumlahan Dua Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$.

Penjumlahan: P + Q = R

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 – x_p – x_q \bmod p$

$y_r = m(x_p – x_r) – y_p \bmod p$

m adalah gradien:

$$m = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \bmod p$$

Pengurangan Dua Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$.

Pengurangan: $P - Q = P + (-Q)$, yang dalam hal ini

$-Q(x_q, -y_q \pmod p)$.

Penggandaan Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ yang dalam hal ini $y_p \neq 0$.

Penggandaan titik: 2P = R

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p \mod p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p \mod p$

Yang dalam hal ini,

$$m = \frac{3{x_p}^2 + a}{2y_p} \mod p$$

Jika $y_p = 0$ maka m tidak terdefinisi sehingga 2P = O

- **Contoh**: Misalkan $P(2, 4)$ dan $Q(5, 9)$ adalah dua buah titik pada kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6 \mod 11$. Tentukan $P + Q$ dan $2P$.

<u>Jawab</u>:

(a) $P + Q = R$

$$m = (9 - 4)/(5 - 2) \mod 11 = 5/3 \mod 11 = 5 \cdot 3^{-1} \mod 11$$
$$= 5 \cdot 4 \mod 11 \equiv 9 \pmod{11}$$

$P + Q = R$, koordinat Titik R:

$$x_r = m^2 - x_p - x_q \mod 11 = 81 - 2 - 5 \mod 11 \equiv 8 \pmod{11}$$
$$y_r = m(x_p - x_r) - y_p \mod 11 = 9(2 - 8) - 4 \mod 11 = -58 \mod 11$$
$$\equiv 8 \pmod{11}$$

Jadi, $R(8, 8)$

(b) 2P = R

$$m = \frac{3x_p^{\;2} \;\; + a}{2y_p} \bmod p$$

$m = (\ 3(2)^2 + 1)/\ 8) \bmod 11 = 13/8 \bmod 11$

$= 13 \cdot 8^{-1} \bmod 11$

$= 13 \cdot 7 \bmod 11$

$= 78 \bmod 11 \equiv 3 \pmod{11}$

Koordinat R:

$x_r = m^2 - 2x_p \bmod p = 3^2 - 2 \cdot 2 \bmod 11 \equiv 5 \pmod{11}$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p \bmod p = 3(2 - 5) - 4 \bmod 11$

$= -13 \bmod 11 \equiv 9 \pmod{11}$

Jadi, R(5, 9)

- Nilai kP untuk k = 2, 3, … diperlihatkan pada tabel:

k	kP
1	(2,4)
2	(5,9)
3	(8,8)
4	(10,9)
5	(3,5)
6	(7,2)
7	(7,9)
8	(3,6)
9	(10,2)
10	(8,3)
11	(5,2)
12	(2,7)
13	O

Jika diketahui P, maka kita bisa menghitung

Q = kP

Jika persoalannya dibalik sbb:

Diberikan P dan Q, maka sangat sukar menghitung k sedemikian sehingga Q = kP

$\Downarrow$

ECDLP

Elliptic Curve Cryptography (ECC) *)

- ECC adalah sistem kriptografi kunci-publik, sejenis dengan RSA, Rabin, ElGamal, D-H, dll.

- Setiap pengguna memiliki **kunci publik dan kunci privat**
  - Kunci publik untuk enkripsi atau untuk verifikasi tanda tangan digital
  - Kunci privat untuk dekripsi atau untuk menghasilkan tanda tangan digital

- Kurva eliptik digunakan sebagai perluasan sistem kriptografi kunci-publik yang lain:

  1. Elliptic Curve Elgamal (ECEG)
  2. Elliptic Curve Digital Signature (ECDSA)
  3. Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Penggunaan Kurva Eliptik di dalam Kriptografi

- Bagian inti dari sistem kriptografi kunci-publik yang melibatkan kurva eliptik adalah **grup eliptik** (himpunan titik-titik pada kurva eliptik dan sebuah operasi biner +).

- Operasi matematika yang mendasari:
  - Jika RSA mempunyai operasi perpangkatan sebagai operasi matematika yang mendasainya, maka
  - ECC memiliki operasi perkalian titik (kP)

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Dua pihak yang berkomunikasi menyepakati parameter data sebagai berikut:

  1. Persamaan kurva eliptik **$y^2 = x^3 + ax + b \mod p$**

     - Nilai a dan b
     - Bilangan prima p

  2. Grup eliptik yang dihitung dari persamaan kurva eliptik

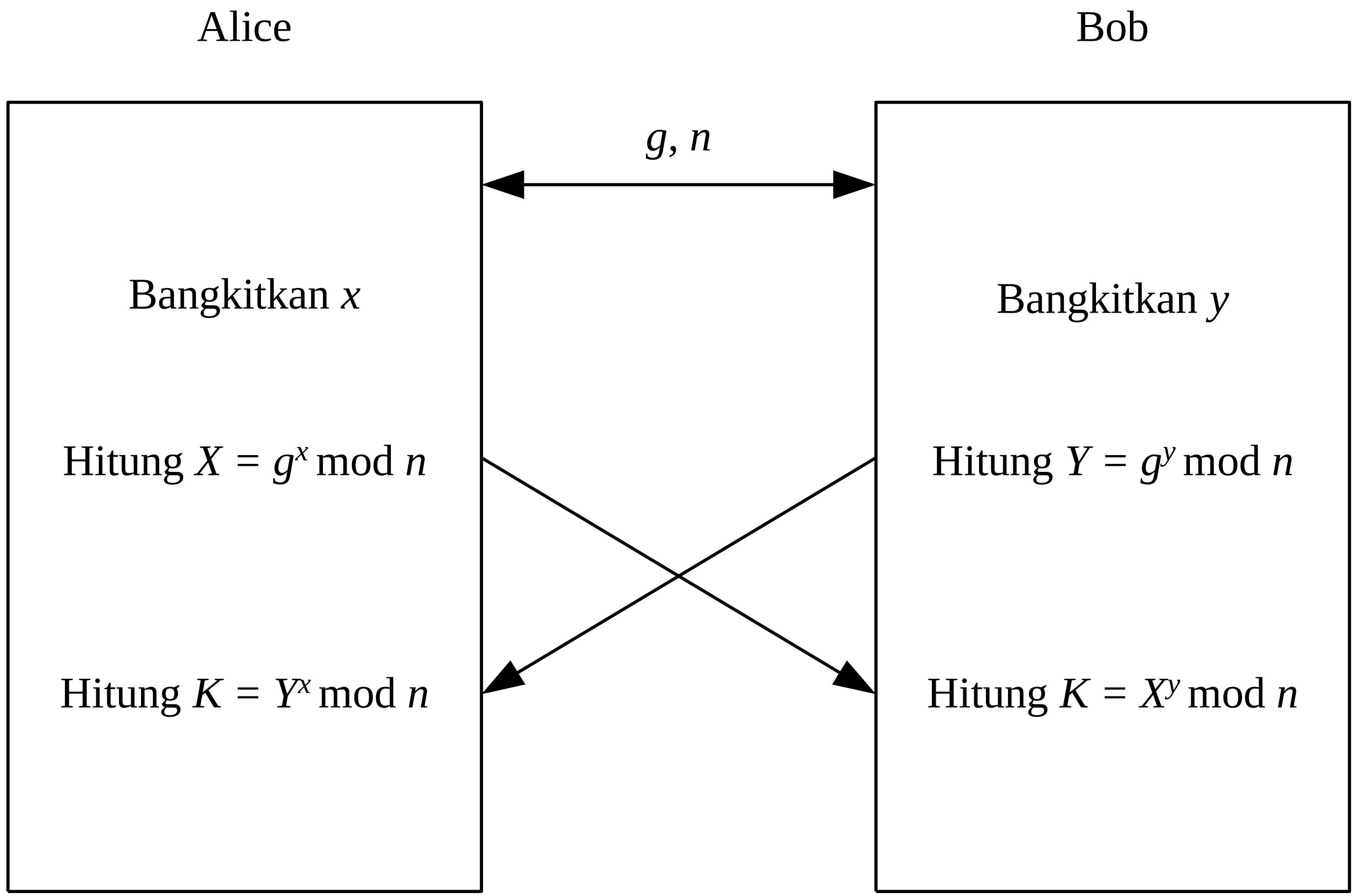
  3. Titik basis (*base point*) B (x_B, y_B) , dipilih dari grup eliptik untuk operasi kriptografi.

- Setiap pengguna membangkitkan pasangan kunci publik dan kunci privat
  - Kunci privat = integer x, dipilih dari selang [1, p – 1]
  - Kunci publik = titik Q, adalah hasil kali antara x dan titik basis B: Q = x· B

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

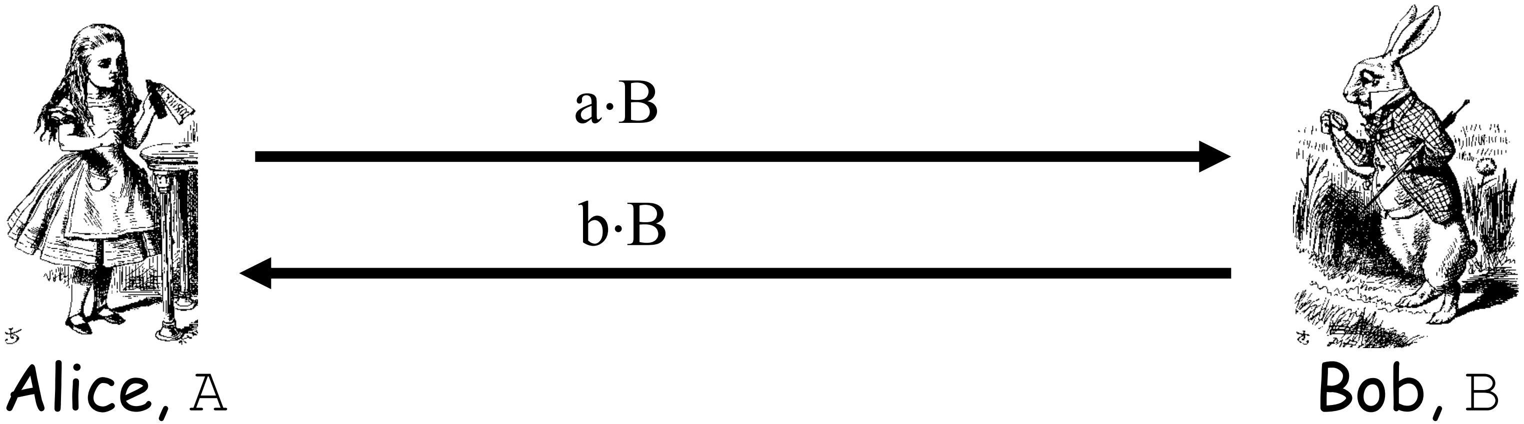
Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

Ingatlah kembali diagram pertukaran kunci Diffie-Hellman:



Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

- **Public:** Kurva eliptik dan titik B(x,y) pada kurva
- **Secret:** Integer milik Alice, a, dan integer milik Bob, b



- Alice menghitung K = a· (b.B)
- Bob menghitung K = b·(a·B)
- Hasil perhitungan akan sama karena ab = ba

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Algoritma Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

- Alice dan Bob ingin berbagi sebuah kunci rahasia K yang sama.
  - Alice dan Bob menyepakati kurva eliptik $\mathbf{y^2 = x^3 + ax + b \mod p}$ dan titik B pada kurva
  - Alice dan Bob menghitung kunci publik dan kunci privat masing-masing.
    - Alice
      - Kunci privat = a
      - Kunci publik = $P_A = a \cdot B$
    - Bob
      - Kunci privat = b
      - Kunci publik = $P_B = b \cdot B$
  - Alice dan Bob saling mengirim kunci publik masing-masing.
  - Keduanya melakukan perkalian kunci privatnya dengan kunci publik mitranya untuk mendapatkan kunci rahasia yang mereka bagi
    - Alice → $K_{AB} = a \cdot P_B = a \cdot (b \cdot B)$
    - Bob → $K_{AB} = b \cdot P_A = b \cdot (a \cdot B)$
    - **Kunci rahasia = K_{AB} = abB**

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Contoh *): Misalkan kurva eliptik yang dipilih adalah $y^2 = x^3 + 2x + 1 \bmod 5$. Himpunan titik-titik pada kurva eliptik adalah {(0, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (1, 2), (0, 4)}. Alice dan Bob menyepakati titik B(0, 1) sebagai basis.

1. Alice memilih a = 2, lalu menghitung kunci publiknya:

   $P_A = a \cdot B = 2B = B + B = (1, 3)$ → misalkan titik Q

2. Bob memilih b = 3, lalu menghitung kunci publiknya:

   $P_B = b \cdot B = 3B = B + B + B = 2B + B = (3, 3)$ → misalkan titik R

3. Alice mengirimkan P_A kepada Bob, Bob mengirimkan P_B kepada Alice.
4. Alice menghitung kunci rahasia sbb:

   $K_A = a \cdot P_B = 2R = R + R = (0, 4)$

5. Bob menghitung kunci rahasia sbb:

   $K_B = b \cdot P_A = 3Q = Q + Q + Q = (0, 4)$

Jadi, sekarang Alice dan Bob sudah berbagi kunci rahasia yang sama, yaitu (0, 4)

*) Sumber bahan: Nana Juhana, Implementasi Elliptic Curve Cryptography (ECC) pada proses Pertukaran Kunci Diffie-Hellman dan Skema Enkripsi El Gamal

Elliptic Curve Elgamal (ECEG)

- *Elliptic Curve Elgamal*: sistem kriptografi kurva eliptik yang diadopsi dari algoritma El Gamal.
- Misalkan Alice ingin mengirim Bob pesan M yang dienkripsi.
  - Baik Alice dan Bob menyepakati kurva elelitik dan titik basis B.
  - Alice dan Bob membuat kunci privat/kunci publik.
    - Alice
      - Kunci privat = a
      - Kunci publik = $P_A = a \cdot B$
    - Bob
      - Kunci privat = b
      - Kunci publik = $P_B = b \cdot B$
  - Alice mengambil plainteks, M, lalu mengkodekannya menjadi sebuah titik, P_M, pada kurva eliptik

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Alice memilih bilangan acak k yang harus terletak di dalam selang [1, p-1]
- Cipherteks dari P_M adalah pasangan titik
  - $P_C = [(kB), (P_M + kP_B)]$

- Untuk mendekripsi, Bob mula-mula menghitung hasil kali titik pertama dari P_C (yaitu **kB**) dengan kunci privatnya, **b**
  - $b \cdot (kB)$

- Bob kemudian mengurangkan titik kedua dari P_C dengan hasil kali di atas
  - $(P_M + kP_B) - [b\cdot(kB)] = P_M + k\cdot(bB) - b\cdot(kB) = P_M$

- Bob kemudian men-*decode* P_M untuk memperoleh pesan M

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Perbandingan Elgamal dengan Elliptic Curve Elgamal

- Cipherteks pada EC-Elgamal adalah pasangan titik
  - $P_C = [(kB), (P_M + kP_B)]$ (ket: P_b = kunci publik Bob)
- Cipherteks pada Elgamal juga pasangan nilai:
  - $C = (g^k \bmod p, my_B{}^k \bmod p)$ (ket: y_b = kunci publik Bob)

- Pada EC_Elgamal, Bob mengurangkan titik kedua dari P_C dengan hasil kali **b · (kB)**
  - $(P_M + kP_B) – [b(kB)] = P_M + k(bB) – b(kB) = P_M$
- Pada El Gamal, Bob membagi nilai kedua dengan nilai pertama yang dipangkatkan dengan kunci privat Bob
  - $m = my_B{}^k / (g^k)^b = mg^{k*b} / g^{k*b} = m$

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay, Elliptic Curve Cryptography ,** Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Encoding Pesan menjadi Titik di dalam Kurva

- Pesan yang akan dienkripsi dengan ECC harus dikonversi (*encoding*) menjadi titik di dalam kurva eliptik.
- Metode yang sederhana adalah memetakan setiap karakter ASCII dengan setiap titik pada kurva eliptik.
- Untuk 256 karakter ASCII, maka dibutuhkan kurva eliptik yang berisi minimal 256 titik.
- Misalkan pesan M = ‘ENCRYPT’, yang dalam nilai ASCII adalah ‘69’ ‘78’, ‘67’, ‘82’, ‘89’, ‘80’, ‘84’. Setiap nilai ini dipetakan ke sebuah titik pada kurva eliptik.
- Namun metode ini kurang aman.

- Metode kedua adalah dengan metode Kolbitz. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Pilih sebuah kurva eliptik **$y^2 = x^3 + ax + b \mod p$** yang mengandung *N* buah titik.
2. Misalkan karakter-karakter penyusun pesan adalah angka 0, 1, 2, …, 9 dan huruf A, B, C, … Z yang dikodekan menjadi 10, 11, …, 35.
3. Kodekan setiap karakater di dalam pesan menjadi nilai *m* di antara 0 dan 35.
4. Pilih sebuah bilangan bulat *k* sebagai parameter basis (disepakati kedua pihak).
5. Untuk setiap nilai *mk*, nyatakan $x = mk + 1$, sulihkan x ke dalam **$y^2 = x^3 + ax + b \mod p$** lalu tentukan nilai *y* yang memenuhi.
6. Jika tidak ada nilai y yang memenuhi, coba untuk $x = mk + 2$, $x = mk + 3$, dst, sampai **$y^2 = x^3 + ax + b \mod p$** dapat dipecahkan.

7 . Pada proses *decoding*, untuk titik (x, y), tentukan nilai *m* terbesar tetapi lebih kecil dari $(x – 1)/k$. Kodekan titik (x, y) menjadi symbol *m*.

Contoh: Misalkan $y^2 = x^3 - x + 188 \mod 751$. Kurva eliptik ini memiliki N = 727 buah titik.

- Misalkan karakter yang akan dikodekan adalah huruf ‘B’, yang dikodekan menjadi nilai 11.
- Pilih $k = 20$, maka $x = mk + 1 = (11)(20) + 1 = 221$. Sulihkan $x = 221$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188 \mod 751 \equiv 456 \pmod{751}$. Tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk $x = mk + 2 = (11)(20) + 2 = 222$. Sulihkan $x = 222$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188 \mod 751$. Juga tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk untuk $x = mk + 3 = (11)(20) + 3 = 223$. Sulihkan $x = 223$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188 \mod 751$. Juga tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk untuk $x = mk + 4 = (11)(20) + 4 = 224$. Sulihkan $x = 224$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188 \mod 751$. Diperoleh y = 248. Jadi, karakter ‘B’ dikodekan menjadi titik (224, 248) pada kurva eliptik.
- Pada proses *decoding*, hitung $m = \lfloor (x - 1)/k \rfloor = \lfloor (224 - 1)/20 \rfloor = \lfloor 11.15 \rfloor = 11$. Jadi pesan semula adalah huruf ‘B’.

Keamanan ECC

- Untuk mengenkripsi kunci AES sepanjang 128-bit dengan algoritma kriptografi kunci publik:
  - Ukuran kunci RSA: 3072 bits
  - Ukuran kunci ECC: 256 bits
- Bagaimana cara meningkatkan keamanan RSA?
  - Tingkatkan ukuran kunci
- **Tidak Praktis?**

NIST guidelines for public key sizes for AES

ECC KEY SIZE (Bits)	RSA KEY SIZE (Bits)	KEY SIZE RATIO	AES KEY SIZE (Bits)
163	1024	1 : 6	
256	3072	1 : 12	128
384	7680	1 : 20	192
512	15 360	1 : 30	256

Supplied by NIST to ANSI X9F1

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Aplikasi ECC

- Banyak piranti yang berukuran kecil dan memiliki keterbatasan memori dan kemampuan pemrosesan.
- Di mana kita dapat menerapkan ECC?
  - Piranti komunikasi nirkabel
  - *Smart cards*
  - Web server yang membutuhkan penangangan banyak sesi enkripsi
  - **Sembarang aplikasi yang membutuhkan keamanan tetapi memiliki kekurangan dalam *power*, *storage* and kemampuan komputasi adalah potensial memerlukan ECC**

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** ,
Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Keuntungan ECC

- Keuntungan yang sama dengan sistem kriptografi lain: *confidentiality*, *integrity*, *authentication* and *non-repudiation*, tetapi…

- Panjang kuncinya lebih pendek
  - Mempercepat proses *encryption*, *decryption*, dan *signature verification*
  - Penghematan *storage* dan *bandwidth*

*) Sumber bahan: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** , Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

TAMAT